已知正四棱锥的侧棱长为 l，其各顶点都再同一球面上，若该球的体积为 36π，且 $3 \leq l \leq 3\sqrt{3}$，则该正四棱锥体积的取值范围是

A. $[18, \frac{81}{4}]$ B. $[\frac{27}{4}, \frac{81}{4}]$ C. $[\frac{27}{4}, \frac{64}{3}]$ D. $[18, 27]$

解：设四棱锥底面边长为 $\sqrt{2}a$，则

$$(3 + \sqrt{9 - a^2})^2 + a^2 = l^2$$

化简得

$$a^2 = \frac{36l^2 - l^4}{36}$$

设 $t = l^2$，棱锥体积为 $V(t)$，则

$$\begin{aligned} V(t) &= 2a^2 + \frac{2a^2}{3} \times \sqrt{9 - a^2} \\ &= \frac{t^2}{324}(36 - t) \qquad\qquad (t \in [9, 27]) \end{aligned}$$

对上式求导得

$$\begin{aligned} V'(t) &= \frac{1}{324} \times [2t \times (36 - t) - t^2] \\ &= \frac{24t - t^2}{108} \end{aligned}$$

设能让 $V(t)$ 取极值的自变量为 t_0，则

$$24t_0 - t_0^2 = 0 \Rightarrow t_0 = 0 \text{（舍）或 } t_0 = 24$$

由此可知 $V(t)$ 在 $(9, 24)$ 上为增函数，在 $(24, 27)$ 上为减函数.
因而

$$V_{\max} = V(24) = \frac{24^2}{324}(36 - 24) = \frac{64}{3}$$

$$V_{\min} = \min\{V(9), V(27)\} = \min\{\frac{9^2}{324}(36 - 9), \frac{27^2}{324}(36 - 27)\} = \frac{27}{4}$$

故选 C.