

设 $a = 0.1e^{0.1}$, $b = \frac{1}{9}$, $c = -\ln 0.9$, 则
A. $a < b < c$ B. $c < b < a$ C. $c < a < b$ D. $a < c < b$

解: 本题使用泰勒公式更加方便:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i$$

对于函数 $a(x) = e^x$, 可在 $x_0 = 0$ 处进行展开:

$$\begin{aligned} a(x) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{a^{(i)}(0)}{i!} x^i \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots \end{aligned}$$

不妨计算到 2 次方项:

$$a(0.1) \approx 1 + 10^{-1} + 5 \times 10^{-3} \approx 1.105$$

因此 $a \approx 0.1105$.

对于 b , 显然有 $b = 0.\dot{1}$.

由于 $\ln x$ 在 $x_0 = 0$ 处无意义, 因此不妨对函数 $c(x) = \ln(1 - x)$ 在 $x_0 = 0$ 处进行展开:

$$\begin{aligned} c(x) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \left(-\frac{x^i}{i}\right) \\ &= -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots\right) \end{aligned}$$

不妨计算到 2 次方项:

$$c(0.1) \approx -(10^{-1} + 5 \times 10^{-3}) = -0.105$$

因此 $c \approx 0.105$.

整理得 $a \approx 0.1105$, $b \approx 0.1111$, $c \approx 0.105$.

故 $c < a < b$, 选 C.