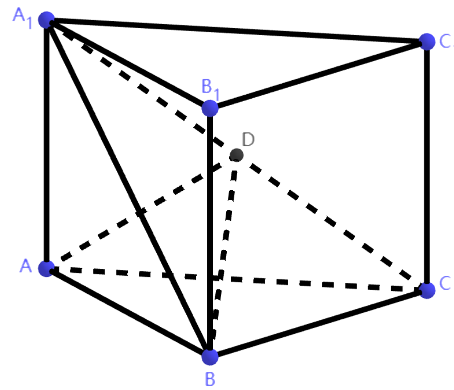
如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 4，$\triangle A_1BC$ 的面积为 $2\sqrt{2}$.

(1) 求 A 到平面 A_1BC 的距离.

(2) 设 D 为 A_1C 的中点，$AA_1=AB$，平面 $A_1BC\perp ABB_1A_1$，求二面角 $A-BD-C$ 的正弦值.



解：(1) $V_{A_1-ABC}=\dfrac{1}{3}V_{ABC-A_1B_1C_1}=\dfrac{4}{3}$.

则 $h_{A-A_1BC}=\dfrac{3V_{A-A_1BC}}{S_{\triangle A_1BC}}=\dfrac{3V_{A_1-ABC}}{S_{\triangle A_1BC}}=\dfrac{3\times\frac{4}{3}}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

故 A 到平面 A_1BC 的距离为 $\sqrt{2}$.

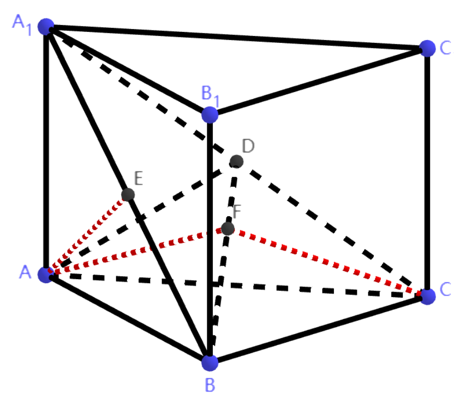
(2) 取 A_1B 中点 E.

$$\left.\begin{aligned} AA_1=AB\Rightarrow A_1ABB_1\text{ 为正方形}\Rightarrow AE\perp A_1B \\ \text{平面 } A_1BC\cap\text{平面 } ABB_1A_1=A_1B \\ \text{平面 } A_1BC\perp\text{平面 } ABB_1A_1 \end{aligned}\right\}\Rightarrow AE\perp\text{平面 } A_1BC.$$

又因为 A 到平面 A_1BC 的距离为 $\sqrt{2}$，所以 $AE=\sqrt{2}$

$\Rightarrow A_1B=2AE=2\sqrt{2}\Rightarrow S_{\triangle ABC}=\dfrac{V_{ABC-A_1B_1C_1}}{AA_1}=\dfrac{4}{2}=2\Rightarrow BC=2$.

作 $AF\perp BD$ 于 F. 则 $\cos\angle ABD=\dfrac{4}{4\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow BF=\dfrac{2}{3}\sqrt{3},AF=2\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{2}{3}\sqrt{6}$.



因为 $\triangle ABD$ 全等于 $\triangle CBD$，所以 $CF\perp BD$. 则 $\sin\angle AFC$ 即为所求.

根据余弦定理

$$\cos\angle AFC=\frac{AF^2+CF^2-AC^2}{AC^2}=\frac{\frac{8}{3}+\frac{8}{3}-8}{2\times(\frac{2}{6}\sqrt{3})^2}=-\frac{1}{2}$$

故二面角 $A-BD-C$ 的正弦值为 $\sqrt{1-(-\dfrac{1}{2})^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.