记 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c. 已知 $\dfrac{\cos A}{1+\sin A}=\dfrac{\sin 2B}{1+\cos 2B}$.

(1) 若 $C=\dfrac{2\pi}{3}$，求 B.

(2) 求 $\dfrac{a^2+b^2}{c^2}$ 的最小值.

解：化简题中条件

$$\begin{aligned}\frac{\cos A}{1+\sin A}&=\frac{\sin 2B}{1+\cos 2B}\\ 2\sin B\cos B(1+\sin A)&=2\cos A\cos^2 B\end{aligned}$$

这里需讨论 $\cos B$ 是否为 0. 当 $\cos B=0$ 即 $B=\dfrac{\pi}{2}$ 时，上述等式成立.
当 $\cos B\neq 0$ 时

$$\begin{aligned}2\sin B(1+\sin A)&=2\cos A\cos B\\ 2(\cos A\cos B-\sin A\sin B)&=2\sin B\\ 2\cos(A+B)&=2\sin B\\ \sin B+\cos C&=0\end{aligned}$$

综上，$B=\dfrac{\pi}{2}$ 或 $\sin B+\cos C=0$.

(1) 因为 $C=\dfrac{2\pi}{3}>\dfrac{\pi}{2}$，所以 $B<\dfrac{\pi}{2}$，因此只能有 $\sin B=-\cos C=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$.

故 $B=\dfrac{\pi}{6}$.

(2) 分类讨论：
①当 $B=\dfrac{\pi}{2}$ 时，原式 $=\dfrac{2a^2+c^2}{c^2}>1$.

②当 $B<\dfrac{\pi}{2}$ 时：

$$
\begin{aligned}
\sin A &= \sin(B+C) = \sin B \cos C + \sin C \cos B \\
&= -\sin^2 B + \sqrt{(1-\cos^2 C)(1-\sin^2 B)} \\
&= 1 - 2\sin^2 B \\
&= 1 - 2\cos^2 C
\end{aligned}
$$

因而

$$
\begin{aligned}
\frac{a^2+b^2}{c^2} &= \frac{(1-2\cos^2 C)^2 + \cos^2 C}{\sin^2 C} \\
&= \frac{1 - 4\cos^2 C + 4\cos^4 C + \cos^2 C}{\sin^2 C} \\
&= -4\cos^2 C - 1 + \frac{2}{1-\cos^2 C} \\
&= 4 - 4\cos^2 C + \frac{2}{1-\cos^2 C} - 5 \\
&= 4\sin^2 C + \frac{2}{\sin^2 C} - 5 \\
&\geq 2\sqrt{4\times 2} - 5 \\
&= 4\sqrt{2} - 5
\end{aligned}
$$

当且仅当 $\sin^4 C = \dfrac{1}{2}$ 时，上式成立.

则当 $B < \dfrac{\pi}{2}$ 时，$\dfrac{a^2+b^2}{c^2}$ 的最小值为 $4\sqrt{2}-5$.

因为 $4\sqrt{2}-5<1$，所以 $\dfrac{a^2+b^2}{c^2}$ 的最小值为 $4\sqrt{2}-5$.