7. 设 $a=0.1e^{0.1}$，$b=\dfrac{1}{9}$，$c=-\ln 0.9$，则

A. $a<b<c$ B. $c<b<a$ C. $c<a<b$ D. $a<c<b$

解：本题使用泰勒公式更加方便：

$$f(x)=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$$

对于函数 $a(x)=e^x$，可在 $x_0=0$ 处进行展开：

$$\begin{aligned}a(x)&=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{a^{(i)}(0)}{i!}x^i\\&=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\cdots\end{aligned}$$

不妨计算到 2 次方项：

$$a(0.1)\approx 1+10^{-1}+5\times 10^{-3}\approx 1.105$$

因此 $a\approx 0.1105$.

对于 b，显然有 $b=0.\dot{1}$.

由于 $\ln x$ 在 $x_0=0$ 处无意义，因此不妨对函数 $c(x)=\ln(1-x)$ 在 $x_0=0$ 处进行展开：

$$\begin{aligned}c(x)&=\sum_{i=1}^{+\infty}(-\frac{x^i}{i})\\&=-(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots)\end{aligned}$$

不妨计算到 2 次方项：

$$c(0.1)\approx -(10^{-1}+5\times 10^{-3})=-0.105$$

因此 $c\approx 0.105$.

整理得 $a\approx 0.1105$，$b\approx 0.1111$，$c\approx 0.105$.

故 $c<a<b$，选 C.

8. 已知正四棱锥的侧棱长为 l，其各顶点都再同一球面上，若该球的体积为 36π，且 $3 \leq l \leq 3\sqrt{3}$，则该正四棱锥体积的取值范围是

A. $[18, \frac{81}{4}]$　B. $[\frac{27}{4}, \frac{81}{4}]$　C. $[\frac{27}{4}, \frac{64}{3}]$　D. $[18, 27]$

解：设四棱锥底面边长为 $\sqrt{2}a$，则

$$(3+\sqrt{9-a^2})^2 + a^2 = l^2$$

化简得

$$a^2 = \frac{36l^2 - l^4}{36}$$

设 $t = l^2$，棱锥体积为 $V(t)$，则

$$\begin{aligned} V(t) &= 2a^2 + \frac{2a^2}{3} \times \sqrt{9-a^2} \\ &= \frac{t^2}{324}(36-t) \qquad\qquad (t \in [9,27]) \end{aligned}$$

对上式求导得

$$\begin{aligned} V'(t) &= \frac{1}{324} \times [2t \times (36-t) - t^2] \\ &= \frac{24t - t^2}{108} \end{aligned}$$

设能让 $V(t)$ 取极值的自变量为 t_0，则

$$24t_0 - t_0^2 = 0 \Rightarrow t_0 = 0\text{（舍）或 } t_0 = 24$$

由此可知 $V(t)$ 在 $(9,24)$ 上为增函数，在 $(24,27)$ 上为减函数.

因而

$$V_{\max} = V(24) = \frac{24^2}{324}(36-24) = \frac{64}{3}$$

$$V_{\min} = \min\{V(9), V(27)\} = \min\{\frac{9^2}{324}(36-9), \frac{27^2}{324}(36-27)\} = \frac{27}{4}$$

故选 C.

18. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c. 已知 $\dfrac{\cos A}{1+\sin A}=\dfrac{\sin 2B}{1+\cos 2B}$.

(1) 若 $C=\dfrac{2\pi}{3}$，求 B.

(2) 求 $\dfrac{a^2+b^2}{c^2}$ 的最小值.

解：化简题中条件

$$\begin{aligned}\frac{\cos A}{1+\sin A}&=\frac{\sin 2B}{1+\cos 2B}\\2\sin B\cos B(1+\sin A)&=2\cos A\cos^2 B\end{aligned}$$

这里需讨论 $\cos B$ 是否为 0. 当 $\cos B=0$ 即 $B=\dfrac{\pi}{2}$ 时，上述等式成立.
当 $\cos B\neq 0$ 时

$$\begin{aligned}2\sin B(1+\sin A)&=2\cos A\cos B\\2(\cos A\cos B-\sin A\sin B)&=2\sin B\\2\cos(A+B)&=2\sin B\\\sin B+\cos C=0\end{aligned}$$

综上，$B=\dfrac{\pi}{2}$ 或 $\sin B+\cos C=0$.

(1) 因为 $C=\dfrac{2\pi}{3}>\dfrac{\pi}{2}$，所以 $B<\dfrac{\pi}{2}$，因此只能有 $\sin B=-\cos C=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$.

故 $B=\dfrac{\pi}{6}$.

(2) 分类讨论：
①当 $B=\dfrac{\pi}{2}$ 时，原式 $=\dfrac{2a^2+c^2}{c^2}>1$.

②当 $B<\dfrac{\pi}{2}$ 时：

$$\begin{aligned}\sin A &= \sin(B+C) = \sin B\cos C + \sin C\cos B \\ &= -\sin^2 B + \sqrt{(1-\cos^2 C)(1-\sin^2 B)} \\ &= 1 - 2\sin^2 B \\ &= 1 - 2\cos^2 C\end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned}\frac{a^2+b^2}{c^2} &= \frac{(1-2\cos^2 C)^2 + \cos^2 C}{\sin^2 C} \\ &= \frac{1-4\cos^2 C + 4\cos^4 C + \cos^2 C}{\sin^2 C} \\ &= -4\cos^2 C - 1 + \frac{2}{1-\cos^2 C} \\ &= 4 - 4\cos^2 C + \frac{2}{1-\cos^2 C} - 5 \\ &= 4\sin^2 C + \frac{2}{\sin^2 C} - 5 \\ &\geq 2\sqrt{4\times 2} - 5 \\ &= 4\sqrt{2} - 5\end{aligned}$$

当且仅当 $\sin^4 C = \dfrac{1}{2}$ 时，上式成立.

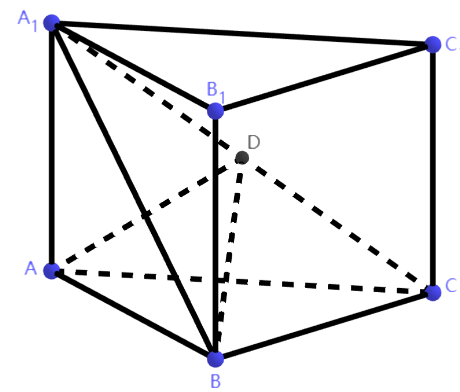
则当 $B < \dfrac{\pi}{2}$ 时，$\dfrac{a^2+b^2}{c^2}$ 的最小值为 $4\sqrt{2}-5$.

因为 $4\sqrt{2}-5<1$，所以 $\dfrac{a^2+b^2}{c^2}$ 的最小值为 $4\sqrt{2}-5$.

19. 如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 4，$\triangle A_1BC$ 的面积为 $2\sqrt{2}$.

(1) 求 A 到平面 A_1BC 的距离.

(2) 设 D 为 A_1C 的中点，$AA_1=AB$，平面 $A_1BC\perp ABB_1A_1$，求二面角 $A-BD-C$ 的正弦值.



解：(1) $V_{A_1-ABC}=\dfrac{1}{3}V_{ABC-A_1B_1C_1}=\dfrac{4}{3}$.

则 $h_{A-A_1BC}=\dfrac{3V_{A-A_1BC}}{S_{\triangle A_1BC}}=\dfrac{3V_{A_1-ABC}}{S_{\triangle A_1BC}}=\dfrac{3\times\frac{4}{3}}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

故 A 到平面 A_1BC 的距离为 $\sqrt{2}$.

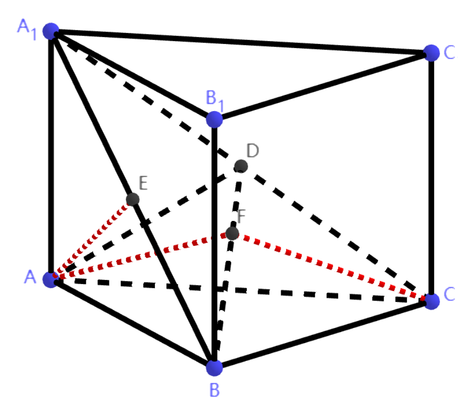
(2) 取 A_1B 中点 E.

$$\left.\begin{aligned} AA_1=AB\Rightarrow A_1ABB_1\text{ 为正方形}\Rightarrow AE\perp A_1B \\ \text{平面 } A_1BC\cap\text{平面 } ABB_1A_1=A_1B \\ \text{平面 } A_1BC\perp\text{平面 } ABB_1A_1 \end{aligned}\right\}\Rightarrow AE\perp\text{平面 } A_1BC.$$

又因为 A 到平面 A_1BC 的距离为 $\sqrt{2}$，所以 $AE=\sqrt{2}$

$\Rightarrow A_1B=2AE=2\sqrt{2}\Rightarrow S_{\triangle ABC}=\dfrac{V_{ABC-A_1B_1C_1}}{AA_1}=\dfrac{4}{2}=2\Rightarrow BC=2$.

作 $AF\perp BD$ 于 F. 则 $\cos\angle ABD=\dfrac{4}{4\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow BF=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}, AF=2\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{2}{3}\sqrt{6}$.



因为 $\triangle ABD$ 全等于 $\triangle CBD$，所以 $CF\perp BD$. 则 $\sin\angle AFC$ 即为所求.

根据余弦定理

$$\cos\angle AFC=\frac{AF^2+CF^2-AC^2}{AC^2}=\frac{\frac{8}{3}+\frac{8}{3}-8}{2\times(\frac{2}{6}\sqrt{3})^2}=-\frac{1}{2}$$

故二面角 $A-BD-C$ 的正弦值为 $\sqrt{1-(-\dfrac{1}{2})^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.